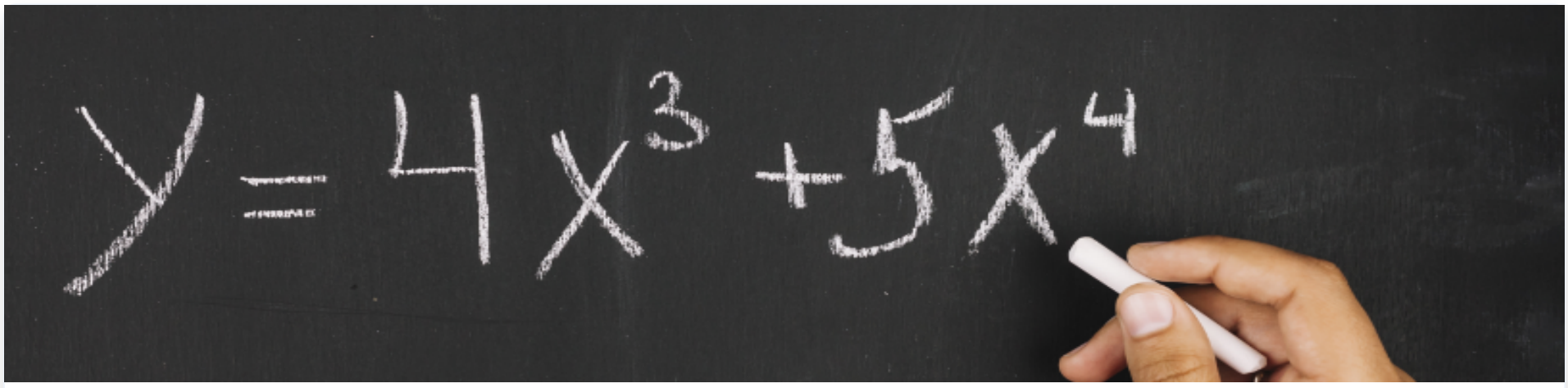
MATEMÁTICAS

Nivel medio

#figuras_planas #ecuaciones #trigonometría

3. Ecuaciones



En nuestro diario vivir nos hacemos ciertas preguntas acerca del valor de algún objeto, de un alimento, el peso del producto, un elemento (x) en una balanza llena de cosas, comparación de dos marcas, todo esto sin darnos cuenta, nos lleva a las ecuaciones.

Una ecuación son igualdades matemáticas entre dos expresiones con datos conocidos y desconocidos separadas por el signo igual. Las encontramos en todos los ámbitos del quehacer diario, no formalizadas con una expresión matemática, pero sí como un problema donde queremos descubrir el valor de un dato desconocido.



Por esto y más, queremos que nos acompañe a ver las características más esenciales de este tema. Las ecuaciones.

Para el SENA es importante el desarrollo de las competencias en el ámbito educativo, laboral y personal.

ANTERIOR SIGUIENTE

3.1 Ecuación

Iniciemos con la definición de ecuación.

Definición

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas; puede no existir regla de correspondencia uno a uno como en el caso de la función.

Existen dos tipos de ecuaciones.

Numéricas	Algebráicas
2+5=7	3x+2=1
Solo relaciona números	**Relacionan expresiones con números y literales**

Las ecuaciones se componen en tres partes, **primer miembro**, **signo igual** y **segundo miembro**. Cada elemento de los miembros, se llaman términos, que pueden ser numéricos o literales. Los términos numéricos a su vez pueden ser coeficientes no constantes. Y las partes literales son las variables o incógnitas.

$$2x + 50 = 100$$

- Términos
- Variable o incógnita
- Primer miembro
- Segundo miembro
- Coeficientes
- Constantes

Solucionar una ecuación es encontrar el valor de la o las incógnitas, que satisface la igualdad.

$$x + 4 = 7$$

$$x = 3$$

$$3 + 4 = 7$$

$$7 = 7$$

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución

Ejemplo

3x + 4 = 10 y 5x = 10, ya que x = 2, satisface las dos ecuaciones.

- Sean las siguientes ecuaciones: 3x + 4 = 10 y 5x = 10
- Solución x = 2

ANTERIOR SIGUIENTE

¿Y qué es una variable?

Una variable es un símbolo cualquiera que puede representar cualquier valor. Para el caso de ecuaciones es la incógnita y es el valor que se quiere encontrar para que satisfaga la igualdad.

$$\underline{4x + 5} = \underline{7 - 6x}$$

Primer miembro Incógnita

Ejemplo

Tenemos dos básculas con tres y dos cajas respectivamente, como se muestra en la figura.



Solución

¿Las básculas marcaran el mismo peso?

No, ya que la báscula de la derecha marcará 6kg y la de la izquierda en una sola caja marca 7kg, sin importar el peso de la caja "x", la báscula marcará un peso mayor.

¿Cómo se podrían dejar con igual peso las básculas?

Podemos intercambiar las cajas de cada báscula, y asignarle un peso a la caja "x", de la siguiente manera.



ANTERIOR SIGUIENTE



3.2 Ecuaciones lineales

Son ecuaciones de primer grado, con una sola incógnita y son de la forma ax+b=c, con:

$$a,b,c \in R\ R$$

Nota

Primer grado, indica que el exponente de la variable x es 1.

Ejemplo

$3x+2=5$	$8p+1/2=3$

En ocasiones se puede presentar en la misma ecuación dos veces la incógnita, sin embargo, no cambia el hecho que son ecuaciones lineales.

Ejemplo

$3x+4=5x+3$	$9x-4=7-10x$

Como se mencionó anteriormente, solucionar una ecuación es encontrar el valor de la incógnita, es decir, se debe despejar la incógnita.

ANTERIOR SIGUIENTE

Ejemplo

Paso 1

Sumamos el opuesto aditivo de 1, a cada miembro de la ecuación.

$$3x + 1 + (-1) = 10 + (-1)$$

Recordemos el opuesto aditivo.

Todo número real (a) tiene un opuesto, (-a),
que satisface a + (-a) = 0

Paso 2

Se efectúan las operaciones en cada miembro.

$$3x = 9$$

Paso 3

Multiplicamos por el opuesto multiplicativo de 3, a cada miembro de la ecuación.

Recordemos el opuesto multiplicativo: todo número real (a) diferente de cero tiene un recíproco, 1/a, que satisface **(a * (1/a) = 1)**

$$3 * (1/3) = 9 (1/3)$$

Paso 4

Se efectúan las operaciones en cada miembro x = 3.

La solución de la ecuación es x = 3

Aplicación I

Ahora veamos una aplicación de las ecuaciones:



A octubre de 2019, el atleta Usain Bolt recorrió 200 metros en 19.19 segundos, esto es 0.49 segundos menos que la marca del atleta Frank Fredericks. **¿Cuál es la marca del atleta Frank Fredericks?**

Solución

Para calcular la marca de Frank Fredericks, podemos modelar el problema por medio de la siguiente ecuación.

$$x - 0.49 = 19.19, \text{ donde } \mathbf{x} \text{ es la marca de Fredericks}$$

Encontramos el valor de la incógnita x:

01	Sumamos el opuesto aditivo de 0.49, a cada miembro de la ecuación.	$x-0.49+(+0.49)=19.19+(+0.49)$
02	se efectúan las operaciones en cada miembro.	$x=19.68$

La marca de Frank Fredericks es de 19.68 segundos

Como se mencionó, en las ecuaciones puede aparecer la variable en los dos miembros.

Ejemplo

$$3x + 4 = 7 - 5x$$

La solución es muy similar a la vista en ejercicios anteriores.

01	Sumamos el opuesto aditivo de -5x, a cada miembro de la ecuación. Esto es para dejar la incógnita en un solo miembro.	$3x+4+(+5x)=7-5x+(+5x)$
02	Reducimos términos semejantes.	$8x+4=7$
03	Sumamos el opuesto aditivo de 4, a cada miembro de la ecuación.	$8x+4+(-4)=7+(-4)$
04	Se efectúan las operaciones en cada miembro.	$8x=3$
05	Multiplicamos por el opuesto multiplicativo de 8, a cada miembro de la ecuación.	$(1/8)8x=(1/8)3$
06	Se efectúan las operaciones en cada miembro. $x=3/8$	$x=3/8$

Aplicación II



Saske tiene 3/2 de la cantidad de esferas de Doris y Suki tiene 4/3 de la cantidad de esferas de Doris. Si Doris cuenta las de ella más 440 esferas, obtiene la misma cantidad de esfera que las de Saske y Suki juntas.

Solución

Identificamos las variables del problema.

- x=cantidad de esfera de Doris
- Esferas de Saske=3/2x
- Esferas de Suki=4/3x

Se plantea la ecuación de acuerdo al enunciado del problema:

$$x + 440 = \frac{3}{2}x + \frac{4}{3}x$$

ANTERIOR SIGUIENTE

Se observa que es una ecuación de primer grado con una incógnita.

Para la solución se tienen los siguientes pasos:

01

Sumamos cada miembro de la ecuación por los inversos aditivos de 3/2 x y 4/3 x y simplificamos

$$x + 440 + \left(-\frac{3}{2}x\right) + \left(-\frac{4}{3}x\right)$$

$$= \frac{3}{2}x + \frac{4}{3}x + \left(-\frac{3}{2}x\right) + \left(-\frac{4}{3}x\right)$$

$$-\frac{11}{6}x = -440$$

02

Sumamos cada miembro de la ecuación por el inverso aditivo de 440 y simplificamos

$$-\frac{11}{6}x + 440 + (-440) = 0 + (-440)$$

$$-\frac{11}{6}x = -440$$

03

multiplicamos cada miembro de la ecuación por el inverso multiplicativo de (-11/6)

$$\left(-\frac{6}{11}\right)\left(-\frac{11}{6}x\right) = \left(-\frac{6}{11}\right)(-440)$$

$$x = 240$$

ANTERIOR SIGUIENTE

de Saske y Suki

$$\text{Saske} = \frac{3}{2}x \quad \text{, remplazando:}$$

$$\text{Esferas de Sasne} = \frac{3}{2}(240) = 360$$

$$\text{Suki} = \frac{4}{3}x \quad \text{, remplazando:}$$

$$\text{Esferas de Suki} = \frac{4}{3}(240) = 320$$

3.3 Sistema de ecuaciones lineales 2x2

Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

$$ax + by = c, \text{ donde } a,b,c \in R$$

Nota

Primer grado ya que "x" y "y" tienen exponente de grado 1.

Se pueden plantear sistemas de ecuaciones lineales 2x2, que significa dos ecuaciones con dos incógnitas. En general se pueden plantar sistemas de n ecuaciones con n incógnitas.

Este curso se centrará solo es los sistemas 2x2 y se denotan de la siguiente manera.

ANTERIOR SIGUIENTE

$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

donde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in R$

Ejemplo de un sistema 2x2

Solucionar un sistema 2x2 es encontrar el valor de "x" y "y" que satisfacen las dos ecuaciones.

Pero no siempre tienen solución los sistemas o tienen infinitas soluciones. Por esto, existen diferentes tipos de sistemas de ecuaciones, como se muestra en la figura.

$$4x + 3y = 7$$

$$5x - 4y = 1$$



Métodos para solución de sistemas de ecuaciones 2x2

Para solucionar un sistema de ecuaciones existen diferentes técnicas o métodos, entre ellas veremos dos:

- **Método igualación**
- **Método por reducción**

Independiente de la técnica, la solución será la misma.

Método de igualación

Consiste en despejar la misma incógnita en cada ecuación para luego igualar las dos ecuaciones, dejando una sola ecuación lineal con una incógnita y se resuelve como tal.

Ilustremos este método con un ejemplo.

$$4x + 3y = 11$$

$$5x - 4y = 6$$

Paso 1 Tomar la primera ecuación 4x +3y=11 y despejamos "y" de la ecuación, sumando el opuesto aditivo de 4x, a cada miembro.

$4x+3y+(-4x)=11+(-4x)$

Paso 2 Reducimos términos semejantes y aplicamos ley de signos.

$3y=11-4x$

Paso 3 Multiplicamos por el opuesto multiplicativo de 3, a cada miembro de la ecuación.

$(1/3)\ 3y = (1/3)\ (11-4x)$

Paso 4 Se efectúan las operaciones en cada miembro.

$y = (11-4x)/3$

Paso 5 Tomar la segunda ecuación 5x-4y=6 y se procede de la misma manera que en la ecuación 1. Despejamos "y" de la ecuación, sumando el opuesto aditivo de 5x, a cada miembro de la ecuación.

$5x-4y + (-5x) = 6 + (-5x)$

Paso 6 Reducimos términos semejantes y aplicamos ley de signos.

$-4y = 6-5x$

Paso 7 Multiplicamos por el opuesto multiplicativo de -4, a cada miembro de la ecuación.

$(-1/4)\ (-4y) = (-1/4)\ (6-5x)$

Paso 8 Se efectúan las operaciones en cada miembro.

$y = (-6+5x)/4$

Paso 9 Se igualan las ecuaciones obtenidas en el paso 5 y 9.

$(11-4x)/3 = (-6+5x)/4$

Paso 10 Intercambiar numeradores para que pasen a multiplicar al miembro contrario. En el caso que un miembro no tenga denominador se puede colocar el 1.

$4\ (11-4x) = 3\ (-6+5x)$

Paso 11 Aplicar ley distributiva.

Como podemos notar el resultado es una ecuación de primer grado, donde se repite la incógnita.

$44-16x = -18+15x$

Paso Sumamos el opuesto aditivo de 15x, a cada miembro de la

$44-16x+(-15x)= -18+15x+(-15x)$

ANTERIOR SIGUIENTE

Paso 13

Reducimos términos semejantes.

Se obtiene una ecuación de primer grado con una incógnita.

$$44-31x = -18$$

Paso 14

Sumamos el opuesto aditivo de 44, a cada miembro de la ecuación.

$$44-31x+(-44) = -18+(-44)$$

Paso 15

Se efectúan las operaciones en cada miembro.

$$-31x = -62$$

Paso 16

Multiplicamos por el opuesto multiplicativo de -31, a cada miembro de la ecuación.

$$(-1/31)(-31x) = (-1/31)(-62)$$

Paso 17

Se efectúan las operaciones en cada miembro.

$$x=2$$

Ya tenemos el valor de la incógnita x, nos falta la incógnita "y". Para encontrarla reemplazamos x, en cualquiera de las ecuaciones iniciales. Vamos a utilizar la ecuación $4x+3y=11$.

Paso 18

Reemplazar x=2 en la ecuación y resolver.

$$4(2)+3y = 11$$
$$8+3y = 11$$

Podemos ver que es una ecuación de primer grado con una incógnita, se procede a resolver como ya se ha visto.

Paso 19

Sumamos el opuesto aditivo de 8, a cada miembro de la ecuación. Se efectúan las operaciones en cada miembro. Finalmente se multiplica por el opuesto multiplicativo de 3, a cada miembro de la ecuación.

$$8+3y = 11$$
$$8+3y+(-8) = 11+(-8)$$
$$3y = 3$$
$$(1/3)3y = (1/3)3$$
$$y = 1$$

Ya con esto encontramos la solución al sistema de ecuaciones 2x2 y es:

$$x=2,\ y=1$$

Actividad no calificable

El precio de un computador de mesa más un escritorio es de $1.200.000 y si realizamos la diferencia entre las dos cosas, el resultado es $400.000.

¿Qué cuesta cada artículo por separado?

ANTERIOR SIGUIENTE

A	B	C	D
x=1, y=1	x=600.000, y=600.000	x=800.000, y=400.000	x=1.000.000, y=200.000

Solución



Primero se identifican las variables presentes en el enunciado, entonces, podemos colocar:

x = precio computador
y = precio del escritorio

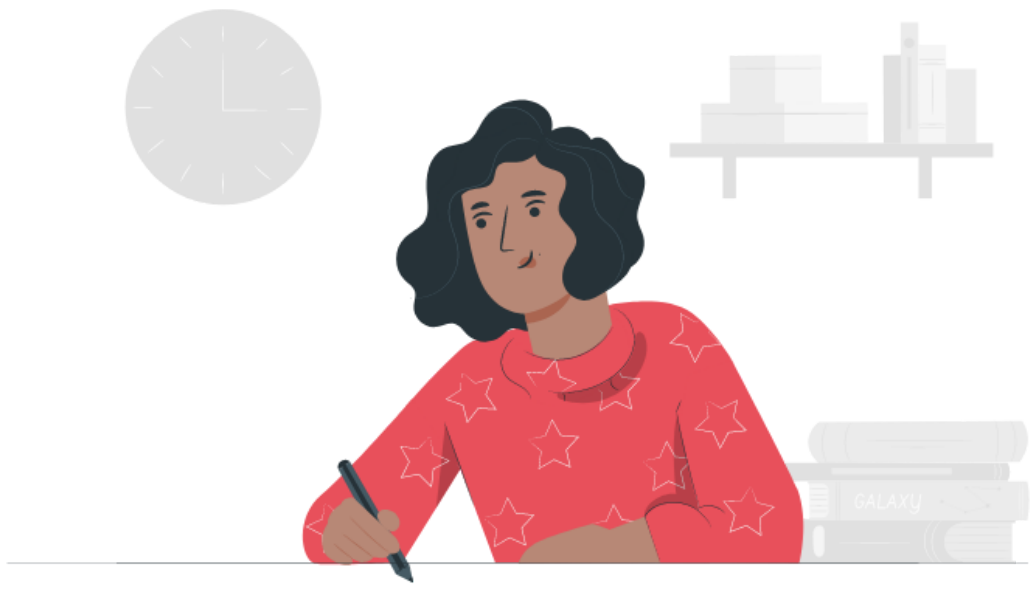
Ahora se plantean las ecuaciones de acuerdo al enunciado, se obtiene:

x+y = 1.200.000
x-y = 400.000

Aplicamos el método de igualación y la solución es:

RESPUESTA CORRECTA **C** **x=800.000 y=400.000**

Método de reducción (eliminación)



Consiste en sumar las dos ecuaciones, de tal manera que se pueda eliminar una de las variables en el proceso. Para esto se equilibran las ecuaciones multiplicando cada ecuación por el coeficiente contrario de la variable objetivo, es decir la variable a reducir o eliminar, dejando así una sola ecuación lineal con una incógnita y se resuelve como tal.

Ilustremos este método con un ejemplo.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones, encontrar los valores de "x" y "y" que satisfacen el sistema.

$$3x + 5x = 35$$

$$4x - 10y = 30$$

ANTERIOR SIGUIENTE

Solución

Paso 1 Se elige una variable para eliminar, en este caso será "x".

Paso 2 Luego equilibramos las ecuaciones multiplicando por los coeficientes contrarios de la variable "x".

$$3x + 5x = 35 \quad (4)$$
$$4x - 10y = 30 \quad (3)$$

Paso 3 Se multiplica

$$12x + 20x = 140$$
$$12x - 30y = 90$$

Paso 3.1. (opcional, depende del ejercicio):

Como se puede ver, los coeficientes de la variable "x" son iguales, para poder eliminarlos deben tener signo contrario, de tal manera que al sumar las ecuaciones reduzcan esta variable "x". Para eso multiplicamos alguna de las dos ecuaciones por (-1)

$$12x + 20x = 140$$
$$12x - 30y = 90 \ (-1)$$

Se obtiene

$$12x + 20x = 140$$
$$-12x + 30y = -90$$

Paso 4 Sumamos las ecuaciones

Se obtiene una ecuación de primer grado, resolvemos como tal.

$$12x + 20x = 140$$
$$-12x + 30y = -90$$
$$0 + 50y = 50$$

Paso 5 Multiplicando cada miembro de la ecuación por el inverso multiplicativo de 50 y simplificando:

$$50y = 50$$
$$(1/50)\ 50y = (1/50)\ 50$$
$$y = 1$$

Paso 6 Con el valor de la incógnita "y", nos falta la incógnita "x". Para encontrarla reemplazamos "y", en cualquiera de las ecuaciones iniciales. Vamos a utilizar la ecuación

$$3x + 5y = 35$$

Paso 7 Reemplazar y=1 en la ecuación y resolver.

Podemos ver que es una ecuación de primer grado con una incógnita, se procede a resolver como ya se ha visto.

$$3x + 5(1) = 35$$
$$3x + 5 = 35$$

Paso 8 Sumamos el opuesto aditivo de 5, a cada miembro de la ecuación. Se efectúan las operaciones en cada miembro. Finalmente se multiplica por el opuesto multiplicativo de 3, a cada miembro de la ecuación.

$$3x + 5 = 35$$
$$3x+5 + (-5) = 35 + (-5)$$
$$3x = 30$$
$$(1/3)\ 3x = (1/3)\ 30$$
$$x = 10$$

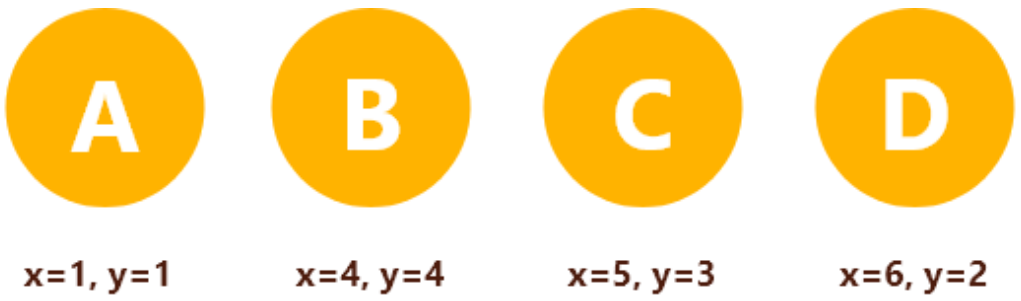
Ya con esto encontramos la solución al sistema de ecuaciones 2x2 y es:

x=10, y=1

Actividad no calificable

En el patio de mi casa tengo canarios y gatos. Al contar sus cabezas suman 8 y al contar sus patas suman 20.

¿Cuántos gatos y canarios tengo?



Solución



Primero se identifican las variables del enunciado sea

x=número de canarios
y=número de gatos

Aplicamos el método de reducción y la solución es:

Se plantean las ecuaciones de acuerdo al enunciado, teniendo en cuenta que los canarios tienen dos patas y los gatos cuatro y ambos animales solo tienen una cabeza, con esto, se obtiene:

$$x+y=8$$
$$2x+4y=20$$





3.4 Ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones cuadráticas, son ecuaciones de segundo grado con una incógnita y se representan como:

$$ax^2 + bx + c = 0 \textbf{ con } a, b, c \in R, a \neq 0$$

La forma $ax^2 + bx + c = 0$ se llama forma estándar de la ecuación cuadrática (Kaufman, 2009).

Ejemplo

$$2x^2 + 5x - 1 = 0$$
$$m\square^2 - 4m = 0$$
$$Z\square^2 = 25$$

Para hallar la o las soluciones de la fórmula cuadráticas, se puede aplicar diferentes métodos como son factorización o la ecuación cuadrática.

$ax^2 + bx = 0$ **con** $a \neq 0$

y despejes sencillos para ecuaciones de la forma:

$ax^2 + c = 0$ **con** $a \neq 0$

Formula cuadrática

La fórmula cuadrática se usa para resolver cualquier ecuación cuadrática al expresar la ecuación en la forma estándar y sustituyendo los valores a, b, c en la fórmula (Jerome Kaufman, 2009)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b - 4ac)}}{-b \pm \sqrt{(b - 4ac)}} \quad \textbf{con } a \neq 0$$

Ejemplo I

Resolver la ecuación

$$3x^2 - 3x - 36 = 0$$

Solución

01 Identificamos los valores de a,b,c en la ecuación.

Se tiene que:

$ax^2=3x^2$ entonces a = 3
bx = -3x entonces b = -3
c = -36

02 Reemplazamos en la fórmula cuadrática los valores de a,b,c y resolvemos.

$$x = \frac{-(-3)\pm\sqrt{((-3)^2 - 4(3)(-36))}}{2(3)}$$

$$x = \frac{3\pm\sqrt{(9+432)}}{6}$$

$$x = \frac{3 \pm 21}{6}$$

03 Se debe tener en cuenta el signo ±, que significa que se debe realizar una operación con el signo + y otra con el signo -. Lo cual resulta en dos posibles soluciones para la ecuación cuadrática.

$$x = \frac{3 + 21}{6} \qquad x = \frac{3 - 21}{6}$$

x = 4 x = -3



Ejemplo II

Resolver la ecuación:

$$4x^2 - 16x = 0$$

Solución

01 La ecuación anterior es de la forma $ax + bx = 0$, lo que indica que se puede factorizar para encontrar la solución, es este caso será factor común.

$$4x^2 - 16x = 0$$
$$4x\,(x-4) = 0$$

02 Se obtienen dos factores y se iguala a cero.

$$4x = 0$$
$$(x-4) = 0$$

03 Como se puede ver son ecuaciones de primer grado con una incógnita. Se resuelve como tal.

$$4x=0$$

$$(1/4)\ 4x = (1/4)\ 0$$

$$x=0$$

$$x-4 = 0$$

$$x - 4 + (4) = 0 + (4)$$

$$x = 4$$

Se obtiene dos soluciones para la ecuación cuadrática.

x = 0 y x = 4

Ejemplo III

Resolver la ecuación:

$$2x^2 - 50 = 0$$

Solución

01 La ecuación anterior es de la forma ax + c = 0, lo que indica que se puede resolver con un simple despeje. Sumamos el inverso aditivo de -50 a cada miembro y luego multiplicamos por el inverso multiplicativo de 2.

$$2x^2 - 50 = 0$$

$$2x^2 - 50 + (50) = 0 + (50)$$

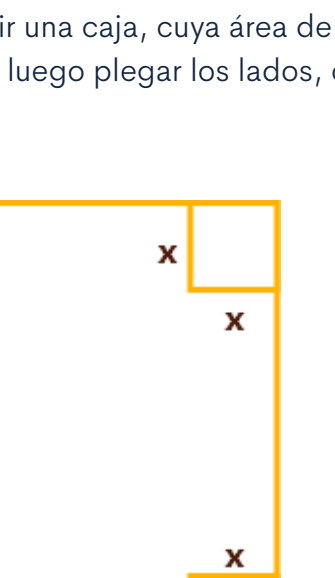
$$2x^2 = 50$$

$$(1/2)\ 2x^2 = (1/2)\ 50$$

$$x^2 = 25$$

02 Despejamos el cuadrado de la variable "x", sacando raíz cuadrada a cada miembro de la ecuación.

$$x^2 = 25$$
$$\sqrt[2]{x^2} = \sqrt[2]{25}$$
$$x = \pm 5$$



Se obtiene dos soluciones para la ecuación cuadrática:

x = 5 y x = -5

Aplicación de la fórmula general en ecuación cuadrática

Tengo un rectángulo de cartón de 60cm de largo por 80cm de alto. Deseo construir una caja, cuya área de la base sea 100 cm . Según las instrucciones se debe cortar en cuadrados iguales las cuatro esquinas y luego plegar los lados, como se muestra en la figura.

¿La longitud del lado del cuadrado que debo recortar de cada esquina es?

Solución

Analizamos las medidas del rectángulo, junto con las medidas de los cuadrados de longitud "x".

Paso 1 Entonces,

Sea **b=largo-2x** que será la medida del largo del rectángulo menos la medida del largo de los dos cuadrados

Sea **h=alto-2x** que será la medida del alto del rectángulo menos la medida del alto de los dos cuadrados

Paso 2 Se debe recordar que la base de la caja es un rectángulo, por lo tanto, es área del rectángulo es:

$$A = b * h$$

y el total de área requerida es 100 cm^2, entonces:

$$b * h = 100\ cm^2$$

Paso 3 Se reemplaza lo valores de b y h del paso 1 y las dimensiones de la caja, se obtiene:

$$(largo - 2x) * (alto - 2x) = 100\ cm^2$$

$$(60 - 2x) * (80 - 2x) = 100\ cm^2$$

Paso 4 Aplicamos propiedad distributiva y simplificamos

$$(60 - 2x) * (80 - 2x) = 100$$

$$4800 - 120x - 160x + 4x^2 = 100$$

$$4x^2 - 380x + 4800 = 100$$

$$4x^2 - 380x + 4800 + (-100) = 100 + (-100)$$

$$4x^2 - 380x + 4700 = 0$$

Paso 5 Para encontrar los valores que satisfacen la ecuación, aplicamos la fórmula cuadrática, con a=4, b=-380 y c=4700

$$x = \frac{-(-380) \pm \sqrt{((-380)^2 - 4\ (4)\ (4700))}}{2\ (4)}$$

$$x = \frac{380 \pm 263.06}{8}$$

$$x = \frac{380 + 263.06}{8} \text{ y } x = \frac{380 - 263.06}{8}$$

$$x = 80.38 \text{ y } x = 14.62$$

Se observan los dos resultados y se analiza el contexto, para el valor de x=80.38, excedería las dimensiones de la caja, por lo tanto se descarta y se opta por el valor de x=14.62, que es la medida del lado del cuadrado que se estaba buscando.

ANTERIOR SIGUIENTE

ANTERIOR SIGUIENTE